

СОДЕРЖАНИЕ

1. Комплексные числа	2
2. Дробно-линейные преобразования	3
3. Комплексная дифференцируемость	5
4. Производная Шварца	6
5. Геометрия комплексных функций	7
6. Контурные интегралы	9
7. Формула Коши, вычеты	10
8. Изолированные особенности и ряды Лорана	12
9. Аналитическое продолжение	13
10. Вычисление интегралов	14
11. Принцип аргумента	16
12. Принцип максимума	17
13. Гиперболическая метрика	18
14. Принцип симметрии и принцип соответствия границ	19
15. Тэта-функции	20
16. Эллиптические функции	22
17. Теоретические вопросы к промежуточной контрольной и итоговому экзамену	23

Следующий список задач для семинаров основан на листочках, подготовленных А.В. Забродиним. Любая из перечисленных ниже задач, за исключением задач со звездочкой, может встретиться на промежуточной контрольной или итоговом экзамене (а в качестве бонусной задачи может встретиться и задача со звездочкой).

Если задача помечена как (ДЗ), то она может встретиться в домашнем задании. Эти задачи можно обсуждать на семинаре, но только по инициативе студентов, пытавшихся их решить, но испытавших какие-либо сложности. Целью обсуждения в этом случае является преодоление возникших сложностей.

Если задача помечена звездочкой, то разбор ее решения на семинаре следует отложить на некоторое время — чтобы студенты могли самостоятельно над ней подумать. Задачи со звездочкой можно сдавать лично преподавателю вне семинарских часов. Преподаватель может устанавливать дедлайны по отдельным задачам со звездочкой так, что до дедлайна можно эту задачу сдавать в индивидуальном порядке, а после дедлайна задача может быть разобрана на семинаре, если возникнет такой запрос со стороны студентов.

Задачи, помеченные контурным кружочком ($\circ$), рекомендуется разбирать на семинаре в каждой группе. Остальные задачи можно опускать

при нехватке времени. Задачи, помеченные заполненным кружочком (●), возможно, будут обсуждаться на лекции.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Найдите действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

(а) $\circ \frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i},$

(б) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3,$

(в) $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4},$

(г) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1} \right)^2$

2. Найдите модули и аргументы следующих комплексных чисел:

(а) $\circ (\sqrt{3}-i)^{2026},$

(б) $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2,$

(в) $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$

(г) (ДЗ) $\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}, \quad 0 < \alpha < 2\pi.$

3. (ДЗ) Докажите, что многочлен

$$f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$$

делится на x^2+1 . *Указание:* воспользуйтесь тем, что $f(i) = 0$.

4. Выразите $\sin 4x$ как многочлен от $\sin x, \cos x$.

5. $\circ$ Решите уравнение $\bar{z} = z^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

6. Решите уравнения $z^2 = 5 - 12i, z^4 + 4 = 0$.

7. $\circ$ Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — все корни уравнения $z^n = 1$, где n — натуральное число. Найдите сумму $\zeta_1^k + \dots + \zeta_n^k$ для каждого натурального k .

8. (ДЗ) Точки z_1 и z_2 — смежные вершины правильного n -угольника. Найдите вершину z_3 , смежную с z_2 ($z_3 \neq z_1$, нумерация против часовой стрелки).

9. Докажите, что комплексные числа a, b, c представляют вершины равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac.$$

10. * Найдите произведение длин отрезков, соединяющих вершину правильного n -угольника со всеми остальными вершинами, если длина стороны равна 1.

11. Дайте геометрическое описание множеств

- (а) $\{z: |z - z_1| = |z - z_2|\}$,
- (б) $\{z: |z - 1| + |z + 1| = 2a\}$ ($a > 1$),
- (в) (ДЗ) $\{z: \operatorname{Re}(1/z) = \frac{1}{2}\}$.

12. Пусть a, b, c, d — четыре различные точки на единичной окружности. Найдите точку пересечения прямых ab и cd .

13. * Докажите равенство

$$|\sqrt{z^2 - 1} + z| + |\sqrt{z^2 - 1} - z| = |z - 1| + |z + 1|.$$

В левой части в оба раза берется одно и то же значение квадратного корня.

14. * Пусть $P(z)$ — многочлен степени n , имеющий n вещественных корней (с учетом кратности), a — произвольное вещественное число. Докажите, что многочлен $Q(z) = P(z + ia) + P(z - ia)$ тоже имеет n вещественных корней.

15. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^{n!}$.

16. Верно ли, что степенной ряд для e^z сходится равномерно на $\mathbb{C}$? Обоснуйте ответ.

2. ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Дробно-линейной функцией, или *дробно-линейным преобразованием*, называется функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

17. Докажите, что дробно-линейное преобразование осуществляет взаимно-однозначное отображение $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

18. • Докажите, что дробно-линейные преобразования образуют группу. Какой группе она изоморфна?

19. • Докажите, что дробно-линейная функция переводит окружности и прямые в окружности (или прямые).

20. Напишите дробно-линейную функцию, переводящую три произвольные (различные) точки z_1, z_2, z_3 в три другие (различные) точки w_1, w_2, w_3 . Единственна ли она?

21. Во что преобразуется квадрант $x > 0, y > 0$ при отображении $w = \frac{z-i}{z+i}$?

22. Найдите все дробно-линейные функции f такие, что $f(f(z)) = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

23. * Докажите, что бидифференциал $\frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}$ инвариантен относительно дробно-линейных преобразований. Как именно дробно-линейное преобразование должно действовать на бидифференциал, предлагается восстановить из здравого смысла; решение задачи должно начинаться с четкого определения этого действия.

Двойным отношением четырех различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 называется

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

24. Докажите, что дробно-линейная функция сохраняет двойное отношение:

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

25. Докажите, что четыре различные точки лежат на одной окружности (или на одной прямой), если и только если их двойное отношение вещественно.

26. Найдите общий вид дробно-линейных изоморфизмов

(а) $\bullet \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$,

(б) $\bullet \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$,

(в) (ДЗ) $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$

($\mathbb{H}$ — верхняя полуплоскость, $\mathbb{D}$ — единичный круг).

27. Отобразите верхнюю полуплоскость на единичный круг так, чтобы $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$.

28. Сколько неподвижных точек может иметь дробно-линейное преобразование? Докажите, что если дробно-линейное преобразование имеет две неподвижные точки в $\mathbb{C}$, то произведение производных в этих точках равно 1.

29. Дробно-линейное преобразование с одной неподвижной точкой z_0 называется *параболическим*. Докажите, что параболическое преобразование можно записать в канонической форме

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h$$

если $z_0 \neq \infty$ и $w = z + h$ если $z_0 = \infty$.

30. Докажите, что дробно-линейное преобразование с двумя различными неподвижными точками z_1, z_2 можно представить в канонической форме

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

если $z_{1,2} \neq \infty$ и $w - z_1 = k(z - z_1)$ если $z_2 = \infty$. Преобразование называется гиперболическим, если $k > 0$, эллиптическим если $|k| = 1$ ($k \neq 1$) и локсодромическим в общем случае комплексного k .

3. КОМПЛЕКСНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

31. о Найдите все точки, в которых $\mathbb{C}$ -дифференцируемы функции
а) $|z|^2$, б) $|z|z$, в) **(ДЗ)** $(\operatorname{Re} z)^2$.

32. а) При каких комплексных a, b, c функция $f(z) = az + b\bar{z} + z^2 + c$ имеет комплексную производную в точке $z = 0$? б) При каких вещественных a, b функция $f(x, y) = ax^2 + by^2 + ixy$ голоморфна на всем $\mathbb{C}$?

33. о Пусть f — дифференцируемая в точке a функция комплексного переменного. Докажите, что функция $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ дифференцируема в точке $\bar{a}$.

34. о Покажите, что функция $f : re^{i\varphi} \mapsto re^{2i\varphi}$ не голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

35. а) Докажите, что если голоморфная в некоторой области (связном открытом множестве) функция $f(z)$ вещественна (т.е. принимает только вещественные значения), то она постоянна.

б) **(ДЗ)** Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области, и $|f(z)| = 1$ всюду в этой области. Докажите, что $f(z) \equiv \text{const}$.

36. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по условию:

- а) $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \cosh y, f(0) = 0$,
- б) $\operatorname{Re} f(z) = x \sin x \cosh y - y \sinh y \cos x, f(0) = 0$,
- в) $\operatorname{Im} f(z) = y \cos x \cosh y - x \sin x \sinh y, f(0) = 2$,
- г) **(ДЗ)** $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$,
- д) $\arg f(z) = xy$.

37. Пусть f — многочлен от z с комплексными коэффициентами. Запишем $f(x + iy)$ как $u(x, y) + iv(x, y)$, где u и v — многочлены от x, y с вещественными коэффициентами. Докажите, что функцию f можно восстановить по ее вещественной части u или мнимой части v с помощью формул

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)},$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right) + \overline{f(z_0)},$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$ — некоторая точка.

Вещественнозначная функция двух вещественных переменных $F(x, y)$ называется *гармонической*, если она дважды дифференцируема и

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

38. Запишите оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ через $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

39. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция. Докажите, что функции $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ — гармонические (т.е. $\Delta \operatorname{Re} f = \Delta \operatorname{Im} f = 0$). Что можно сказать о функциях $|f|$ и $\arg f$? В этой задаче можно предполагать, что вещественная и мнимая части функции f имеют непрерывные частные производные порядка ≤ 2 .

40. Пусть $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ — гармоническая функция на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Для каких функций $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функция $G \circ F$ тоже будет гармонической на U ?

41. Найдите все гармонические функции вида

а) $F = \varphi(x^2 + y^2)$,

б) $F = \varphi(x^2 - y^2)$,

в) $F = \varphi(y/x)$.

42. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция. Являются ли гармоническими функции $u(x, -y)$, $u(x^2 - y^2, 2xy)$?

43. Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ на $\mathbb{C}$ такую, что $u(\cos t, \sin t) = \cos^2 t$.

4. ПРОИЗВОДНАЯ ШВАРЦА

Задачи из этого раздела не войдут в итоговый контроль.

Производной Шварца (шварцианом) голоморфной функции $w(z)$ (во всех задачах про производную Шварца можно считать эту функцию

многочленом, а кратные производные воспринимать алгебраически — как производные многочлена) называется выражение

$$S(w; z) := \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2.$$

44. Докажите следующее тождество, связывающее двойное отношение со шварцианом:

$$\frac{(w(z+ta), w(z+tb), w(z+tc), w(z+td))}{(a, b, c, d)} =$$

$$= 1 + \frac{t^2}{6} (a-b)(c-d)S(w; z) + O(t^3) \quad (t \rightarrow 0).$$

45. Докажите, что $S(w; z) = 0$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ — дробно-линейная функция.

46. Докажите, что

$$S(w; z) = 6 \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta}.$$

47. Пусть $w(z)$, $f(w)$ — две функции, F — их композиция: $F(z) = f(w(z))$. Докажите, что

$$S(F; z) = S(f; w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + S(w; z).$$

48. * Пусть f_1, f_2 — два линейно независимых решения дифференциального уравнения $f'' + Q(z)f = 0$. Покажите, что $Q(z) = \frac{1}{2} S(f_1/f_2; z)$.

5. ГЕОМЕТРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

49. Найдите, во что переводят координатную сетку следующие отображения из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$: (а) $z \mapsto z^2$; (б) $z \mapsto e^z$; (в) $z \mapsto 1/z$.

50. Отображение $z \mapsto z + (1/z)$ определено на множестве всех ненулевых комплексных чисел.

(а) Во что это отображение переводит множество $\{z: |z| > 1\}$?

(б) Является ли это отображение взаимно-однозначным на данном множестве?

51. Пусть $A > 0, C$ действительные, а B — комплексная постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Докажите, что уравнение

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

является уравнением окружности и найдите центр этой окружности и ее радиус.

52. Напишите уравнение окружности, проходящей через три различные точки z_1, z_2, z_3 , не лежащие на одной прямой.

53. * Пусть отображение задано формулой $z \mapsto Az + B\bar{z}$, в которой A, B — заданные комплексные числа, причем $|A| > |B|$. Докажите, что образ окружности с центром в нуле при таком преобразовании — эллипс. Выразите длины главных полуосей этого эллипса, а также отношение площади внутри эллипса к площади внутри окружности в терминах A и B .

54. ◦ Найдите конформное отображение полукруга $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость.

55. ◦ Найдите конформное отображение полуполосы $\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 1$ на верхнюю полуплоскость.

56. Найдите конформное отображение верхней полуплоскости с выброшенным отрезком от 0 до i на верхнюю полуплоскость.

57. * Найдите конформное отображение внешности эллипса с полуосями a, b ($a > b$) на внешность единичного круга.

58. Найдите конформное отображение области

$$\{z : \operatorname{Im}(z) > 0\} \setminus \{z : |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \alpha\},$$

где $0 < \alpha < \pi$, на верхнюю полуплоскость.

59. Найдите конформное отображение области, являющейся полуполосой $\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом по отрезку $[\frac{1}{2}\pi i, 1 + \frac{1}{2}\pi i]$, на верхнюю полуплоскость.

60. * Найдите конформное отображение $z(w)$ внешности единичного круга $\mathbb{D}$ на расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$ (т.е. некомпактной области $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$) на расширенную комплексную плоскость с разрезом по дуге γ единичной окружности с углом раствора 2α ,

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, -\alpha < \arg z < \alpha\} \quad (0 < \alpha < \pi),$$

(т.е. на область $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$), такое, что $z(\infty) = \infty$ и $z'(\infty) \in \mathbb{R}_{>0}$. Последнее условие означает, что $z(w) = \lambda w + o(w)$ при $w \rightarrow \infty$ для некоторого положительного действительного числа λ .

61. * Пусть Γ — гладкая кривая $\Gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$ в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, начинающаяся в точке $\Gamma(0) \in \mathbb{R}$ вещественной оси, и пусть Γ_t — часть кривой $\Gamma_t := \Gamma([0, t])$. Через $g(z, t)$ обозначим функцию, осуществляющую конформное отображение области $\mathbb{H} \setminus \Gamma_t$ на $\mathbb{H}$, нормированную условием $g(z, t) = z + u(t)z^{-1} + O(z^{-2})$, $z \rightarrow \infty$, $t > 0$. Докажите, что существует непрерывная вещественнозначная

функция $\xi(t)$, такая, что функция $g(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{g(z, t) - \xi(t)} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad g(z, 0) = z.$$

Это уравнение называется (хордовым) уравнением Левнера и играет важную роль в теории конформных отображений.

62. (ДЗ) Укажите хотя бы один конформный изоморфизм между верхней полуплоскостью и внешностью параболы. Обоснуйте ответ.

63. (ДЗ) Укажите хотя бы один конформный изоморфизм между $\mathbb{D}$ и $\mathbb{D} \setminus [1/2; 1]$, где $\mathbb{D}$ — это открытый единичный диск, а $[1/2; 1]$ — отрезок вещественной оси между точками $1/2$ и 1 . Обоснуйте ответ.

6. КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Направление обхода контуров в контурных интегралах предполагается положительным (против часовой стрелки).

64. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$ по контуру $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

65. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} z^n dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, а γ — некоторый путь из a в b . (Убедитесь, что при $n \neq -1$ интеграл не зависит от выбора пути, а при $n = -1$ зависит, и опишите как.)

66. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{4}}$ по единичной окружности.

67. Вычислите интеграл $\oint_{\gamma} \frac{2z^2 + 5z + 8}{z(z+1)^2} dz$, где контур γ — окружность $|z| = 3$.

68. Найдите все возможные значения интеграла $\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ при различных выборах контура C (здесь C — замкнутый контур без самопересечений, не проходящий ни через одну из точек $0, 1, -1$).

69. (ДЗ) Покажите, что если путь γ , соединяющий точки 0 и 1 , не проходит через точки $\pm i$, то

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k — целое число.

70. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=1} \cos(z^{-1}) dz$.

71. Приведите пример рациональной функции f и замкнутого контура γ таких, что $\oint_{\gamma} f(z) dz = 1$ и $\oint_{\gamma} z f(z) dz = -1$.

72. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ — окружность радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, проходимая против часовой стрелки.

73. (ДЗ) Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, где γ — окружность радиуса R с центром в точке a ($|a| \neq R$).

74. Пусть $P(z)$ — многочлен. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} P(z) d\bar{z} = -R^2 P'(a).$$

75. Пусть γ — гладкий замкнутый контур, а функция f голоморфна в окрестности кривой γ . Докажите, что $\oint_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$ — чисто мнимое число.

76. Вычислите интегралы

$$(a) \iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2} dx dy, \quad (б) \iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z}} dx dy.$$

77. * Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi - 3\varphi) d\varphi.$$

7. ФОРМУЛА КОШИ, ВЫЧЕТЫ

78. С помощью интегральной формулы Коши вычислите интегралы

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2 - 1}, \quad (б) \text{ (ДЗ) } \int_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^4 - 1}, \quad a > 1,$$

$$(в) \int_{|z-1|=1} \frac{ze^z dz}{(z-1)^3}.$$

79. Пусть $f : \bar{\mathbb{H}} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, голоморфная в $\mathbb{H}$ и такая, что $f(\infty) = 0$. Докажите интегральную формулу Шварца

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - z} dx, \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Напомним, что $\mathbb{H}$ обозначает открытую верхнюю полуплоскость. Интеграл понимается в смысле *главного значения*, то есть как предел $\int_{-R}^R$ при $R \rightarrow +\infty$.

80. * Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в единичном круге, непрерывно продолжаемая на его границу. Докажите *интегральную формулу Пуанкаре*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + i \operatorname{Im} f(0).$$

81. Найдите вычеты дифференциальных форм в их особых точках:

- а) $\frac{zdz}{z^2+1}$, б) $\frac{e^z dz}{(z-1)^2}$, в) $\frac{zdz}{\sin^2 z}$, г) $\frac{z^{2n} dz}{(z-1)^n}$, д) $\frac{e^{1/z} dz}{1-z}$,
 е) $\sin z \sin(1/z) dz$, ж) **(ДЗ)** $\frac{\sin 3z - 3 \sin z}{\sin z (\sin z - z)} dz$ в точке $z = 0$,
 з) $z^2 \sin \frac{1}{z+1} dz$, и) $\frac{dz}{z(e^{2z}-1)}$ в точке $z = 0$, к) $e^{z/(1-z)} dz$.

82. (ДЗ) Докажите, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) dz = -\operatorname{res}_{z=-a} f(z) dz,$$

а для нечетной

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) dz = \operatorname{res}_{z=-a} f(z) dz.$$

83. Вычислите интегралы:

- а) $\oint_{|z|=4} \frac{z^4 dz}{e^z + 1}$, б) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{(2z+1)^2(z+2)}$, в) $\oint_{|z|=1} (z+1)e^{1/z} dz$,
 г) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$, д) $\oint_{|z|=3} \frac{z^3-1}{z-1} \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz$,
 е) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}$, ж) **(ДЗ)** $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-\cos z)}$,
 з) $\oint_{|z|=1} \frac{z - (\log 2)^{-1}}{e^{1/z} - 2} dz$.

84. Пусть функция $f(z)$ регулярна в замыкании конечной области D , а точки $a_1, \dots, a_n$ лежат в D и попарно различны. Обозначим $P(z) = (z-a_1) \dots (z-a_n)$ и

$$\Phi(z) = -\frac{P(z)}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \frac{d\xi}{\xi-z}, \quad z \notin D.$$

Докажите, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость и представляет собой многочлен степени $n - 1$, причем $\Phi(a_k) = f(a_k)$, $k = 1, \dots, n$. (Многочлен $\Phi(z)$ называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.)

85. Пусть $p_1, \dots, p_N$ — N различных комплексных чисел. Докажите тождество

$$\sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i}^N \frac{p_i + p_j}{p_i - p_j} = \frac{1}{2} (1 - (-1)^N).$$

Указание: воспользуйтесь тем, что сумма вычетов рациональной функции, включая вычет в ∞ , равна 0.

86. * Пусть $w_1, \dots, w_N$ — N различных комплексных чисел. Найдите сумму

$$S = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i}^N \frac{1 - w_i w_j}{w_i - w_j}.$$

8. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЕННОСТИ И РЯДЫ ЛОРАНА

87. Для каждой из следующих функций найдите все их изолированные особенности и укажите тип этих особенностей (устраняемая, полюс, существенная). В случае полюсов, укажите их порядок.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 4)^2}, \quad (б) f(z) = \frac{z}{\sin(z^2)}, \quad (в) f(z) = e^{\operatorname{tg} z}.$$

88. Существует ли функция f , голоморфная в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющая неравенствам $|z|^{5/3} \leq |f(z)| \leq |z|^{4/3}$ для всех $z \in \mathbb{D}$?

89. Разложите функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана:

- а) в круге $\{z : |z| < 1\}$;
- б) в кольце $\{z : 1 < |z| < 2\}$;
- в) в кольце $\{z : |z| > 2\}$.

90. Пусть a и b — два различных ненулевых комплексных числа.

(а) Докажите, что функция $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ имеет однозначную ветвь в бесконечном кольце $\{z : |z| > \max(|a|, |b|)\}$; найдите коэффициенты при z^2 и z^{-2} в ее ряде Лорана в этом кольце.

(б) Те же вопросы про функцию $f(z) = \log \frac{z-a}{z-b}$ (через $\log$ обозначается натуральный логарифм).

91. Пусть f голоморфна в проколотом круге $\mathbb{D}^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| \leq |z|^{-\sqrt{7}}$ для всех $z \in \mathbb{D}^*$. Что можно сказать об изолированной особенности функции f в нуле?

92. (ДЗ) Пусть f голоморфна в проколотом круге $\mathbb{D}^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| \leq 1 - \log |z|$ для всех $z \in \mathbb{D}^*$. Что можно сказать об изолированной особенности функции f в нуле?

93. Пусть f голоморфна в проколотом круге $\mathbb{D}^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ и при этом $\operatorname{Re} f(z) > 0$ для всех $z \in \mathbb{D}^*$.

(а) Может ли f иметь в точке 0 существенную особенность?

(б) Может ли f иметь в точке 0 полюс?

94. * Существует ли голоморфная функция $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, такая, что $f(z) + e^{f(z)} = 1/z$?

95. Пусть P — многочлен степени n без кратных корней; обозначим его корни через $a_1, \dots, a_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1^k}{P'(a_1)} + \dots + \frac{a_n^k}{P'(a_n)} = 0$$

для всякого целого k , такого, что $0 \leq k \leq n - 2$.

9. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

96. Рассмотрим аналитическое продолжение ростка аналитической функции $f(z) = \sqrt{z^2 + 9}$, заданного в окрестности точки $z = 4$ условием $f(4) = 5$, вдоль а) полуокружности $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, б) полуокружности $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z < 0$, в) отрезка $[-4, 4]$. Чему равно $f(-4)$ во всех этих случаях?

97. (ДЗ) Фиксируем какую-либо ветвь функции $f(z) = \sqrt{z^2 - 9}$ в окрестности точки $z = 5$ и рассмотрим два способа ее аналитического продолжения из точки $z = 5$ в точку $x \in [-3, 3]$: вдоль дуги полуокружности в верхней полуплоскости и вдоль дуги полуокружности в нижней полуплоскости. Результаты обозначим $f(x + i0)$ и $f(x - i0)$ соответственно. Как связаны между собой $f(x + i0)$ и $f(x - i0)$?

98. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезами по отрезкам $[-1, i]$ и $[-i, 1]$, а $h(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{1 - z^4}$, положительная на интервале $(-1, 1)$. Найдите значения $h(\sqrt{5/3})$, $h(i\sqrt{5/3})$.

99. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{1-z^2}$ в области D , удовлетворяющая условию $h(0) = 1$. Найдите значение $h(-3)$ в случаях, когда область D а) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1, +\infty]$ и $[-1, -1 + i\infty]$, б) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1, 1 - i\infty]$ и $[-1, -1 - i\infty]$.

100. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\log \frac{1-z}{1+z}$ в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, такая, что $h(0 + i0) = 0$. Найдите значения $h(0 - i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Разложите функцию $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности ∞ .

101. (ДЗ) Пусть D — вся плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, а $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\log(1-z^2)$ в области D , удовлетворяющая условию $h(0) = 0$. Найдите $h(i)$, $h(-i)$, $h(2 + i0)$, $h(2 - i0)$.

102. Исследуйте поведение каждой из однозначных ветвей заданных аналитических функций в окрестности указанных точек и определите тип особенностей (если они есть):

а) $\frac{z}{1 + \sqrt{z-3}}$, $z = 4$, б) $z + \sqrt{z^2 - 1}$, $z = \infty$, в) $\frac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z = 1$,
г) $\cos \frac{1}{1 + \sqrt{z}}$, $z = 1$, д) **(ДЗ)** $\sin \frac{1}{1 + \sqrt{z/(z-1)}}$, $z = \infty$.

103. Найдите вычеты $\operatorname{res}_{z=1}(f(z)dz)$ для каждой из однозначных ветвей функции а) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z}+1}$, б) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1+\sqrt{z}}\right)$.

10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

В этом разделе не следует разбирать все задачи. Можно разобрать только некоторые (примерно одну треть, на выбор аудитории или семинариста).

104. Вычислите интегралы Френеля $\int_0^\infty \cos x^2 dx$, $\int_0^\infty \sin x^2 dx$.

105. Вычислите интеграл $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$.

106. Вычислите интегралы

а) $\bullet \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, б) **(ДЗ)** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} dx$.

107. Вычислите интеграл $\int_0^\infty \cos x \frac{\sin x}{x} dx$.

108. Вычислите определенные интегралы (параметры a, b, k предполагаются вещественными):

$$\begin{aligned} \text{а)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} \quad (a > b > 0), \quad \text{б)} \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, \quad \text{в)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^n + 1}, \\ \text{г)} \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx, \quad \text{д)} \bullet \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx, \quad \text{е)} (\text{ДЗ}) \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx, \\ \text{ж)} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} \quad (0 < a < 1), \quad \text{з)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos kx dx}{\cosh x}. \end{aligned}$$

109. Вычислите определенные интегралы

$$\begin{aligned} \text{(а)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos kx dx}{\cosh x + \cosh a} \quad (k, a > 0), \quad \text{(б)} * \int_0^\infty e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx, \\ \text{(в)} \int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3} dx, \quad \text{г)} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx \quad (0 < a, b < 1), \\ \text{(д)} * \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\cosh x}, \quad \text{(е)} \int_0^\infty \frac{x dx}{\sinh x}, \quad \text{(ж)} * \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \pi^2) \cosh x}. \end{aligned}$$

110. Пусть регулярная ветвь $g(z)$ функции $\sqrt{z^2 - 4}$ определена в области D , представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности $|z| = 2, \operatorname{Im} z \geq 0$, причем главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в окрестности ∞ равна z . Вычислите интеграл

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

111. Вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(2 + g(z)) \sin z},$$

где $g(z)$ — однозначная ветвь функции $\sqrt{z-1}$ в круге $|z| \leq \frac{1}{2}$, такая, что $g(0) = i$.

112. (ДЗ) Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{2z-8}$ в комплексной плоскости с разрезом по лучу $[4, 4 - i\infty]$ такая, что $f(8) = -1 - i\sqrt{3}$. Вычислите интеграл

$$I = \oint_{|z-2|=3/2} \frac{dz}{f(z) - z + 2}.$$

113. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx.$$

114. Вычислите интеграл с помощью вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx \quad (0 < \alpha < 1).$$

115. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\alpha} \frac{dx}{x+1} \quad (-1 < \alpha < 1); \\ \text{б) } & \int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} dx; \quad \text{в) } \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^2(4-x^2)}}. \end{aligned}$$

116. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{x^2+a^2} \quad (a > 0); \\ \text{в) } & \int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{(x+1)(x+2)^2}; \quad \text{г) } \int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{x^2-1}. \end{aligned}$$

117. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\begin{aligned} \text{a) } & * \int_0^{\infty} \left(\frac{\log x}{x-1} \right)^2 dx; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \log x dx}{x^2+1}; \\ \text{в) } & * \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |x^2-1|}{x^2+1} dx; \quad \text{г) } * \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

11. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

118. Сколько корней многочлена $z^7 + 3z + 1$ находится в круге $|z| < 1$?

119. Сколько корней многочлена $z^5 + z^2 + 3z + 1$ находится в круге $|z| < 1$?

120. Докажите, что уравнение $e^z = z + 2$ имеет в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z < 0$) единственный (и при том действительный) корень.

121. Докажите, что при $\lambda > 1$ уравнение $ze^{\lambda-z} = 1$ имеет в единичном круге ровно один корень (и при том действительный).

122. (ДЗ) Найдите количество корней многочлена

$$z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$$

в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.

123. Найдите количество корней уравнения

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$$

в правой полуплоскости и в правом верхнем квадранте.

12. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

124. Пусть f — целая непостоянная функция. Положим

$$M = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Докажите, что функция $r \mapsto M(r)$ является строго возрастающей. Чему может быть равен ее предел при $r \rightarrow +\infty$?

125. Пусть Δ — равносторонний треугольник со стороной длины a , рассматриваемый как множество своих внутренних и граничных точек. Найдите максимум произведения расстояний от точки из Δ до трех вершин треугольника.

126. (ДЗ) Рассмотрим функцию f , непрерывную в единичном диске $\{|z| \leq 1\}$ и голоморфную в его внутренности $\{|z| < 1\}$. Если $|f(z)| = 1$ для всех z на единичной окружности $\{|z| = 1\}$, то либо $f = \text{const}$ на $\{|z| \leq 1\}$, либо уравнение $f(z) = 0$ имеет хотя бы одно решение при $|z| < 1$. Докажите.

127. Докажите, что всякий конформный автоморфизм комплексной плоскости имеет вид $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$.

128. Докажите, что не существует конформного автоморфизма между множествами $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 1000\}$.

129. • Докажите, что всякий конформный автоморфизм единичного круга — дробно-линейный автоморфизм.

130. (ДЗ) Пусть D — единичный круг (без границы). Существует ли голоморфное отображение $f : D \rightarrow D$, для которого $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$?

131. * Предположим, что функция f определена и непрерывна на замкнутой полосе S между двумя параллельными прямыми, что она ограничена на этой полосе и голоморфна в ее внутренности. Докажите, что $\sup_{z \in S} |f(z)| = \sup_{z \in \partial S} |f(z)|$.

13. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МЕТРИКА

132. Даны две точки α, β внутри единичного круга $D = \{|z| < 1\}$. Найдите максимум $|f'(\alpha)|$ по всем голоморфным функциям $f : D \rightarrow D$, таким, что $f(\alpha) = \beta$.

133. Найдите гиперболическую метрику в полосе $|\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}$.

134. В каждом непустом кольце $A = \{r < |z| < R\}$ имеется единственная гиперболическая метрика, за исключением случая $r = 0$, $R = \infty$. Обоснуйте это утверждение и запишите гиперболическую метрику в координате z .

Гладкая кривая $\gamma \subset U$ в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ называется *геодезической* относительно конформной метрики $g(z)|dz|$ в U , если у каждой точки из γ найдется такая окрестность, что любой отрезок кривой γ с концами a, b , лежащий в данной окрестности, минимизирует длину (то есть отрезок кривой γ является самой короткой кривой, соединяющей точки a и b ; длина вычисляется как интеграл от $g(z)|dz|$).

135. Проверьте, что для метрики Пуанкаре $\frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}$ в верхней полуплоскости геодезические представляют собой интервалы прямых или дуги окружностей, перпендикулярных *абсолюту* $\{\operatorname{Im}(z) = 0\}$.

Напомним, что двойное отношение (z_1, z_2, z_3, z_4) четырех точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ введено в разделе 2.

136. Кратчайшее расстояние между двумя точками a, b в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(z) > 0$ с метрикой Пуанкаре $\frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}$ выражается формулой

$$\log |(a, b, \alpha, \beta)|,$$

где α, β — точки, в которых геодезическая через a, b подходит к абсолюту, причем порядок точек α, a, b, β соответствует порядку точек на замыкании геодезической (для прямой $\alpha = \infty$ или $\beta = \infty$).

137. (ДЗ) Докажите, что все конформные автоморфизмы верхней полуплоскости переводят геодезические (метрики Пуанкаре) в геодезические.

138. * Зафиксируем непустое кольцо $A = \{r < |z| < R\}$. Имеется единственная замкнутая геодезическая в A (т.е. геодезическая, гомеоморфная окружности). Обоснуйте это утверждение и посчитайте длину этой геодезической. Выведите отсюда, что кольцо A может быть конформно изоморфно кольцу $\{r' < |z| < R'\}$ только в том случае, когда $R/r = R'/r'$.

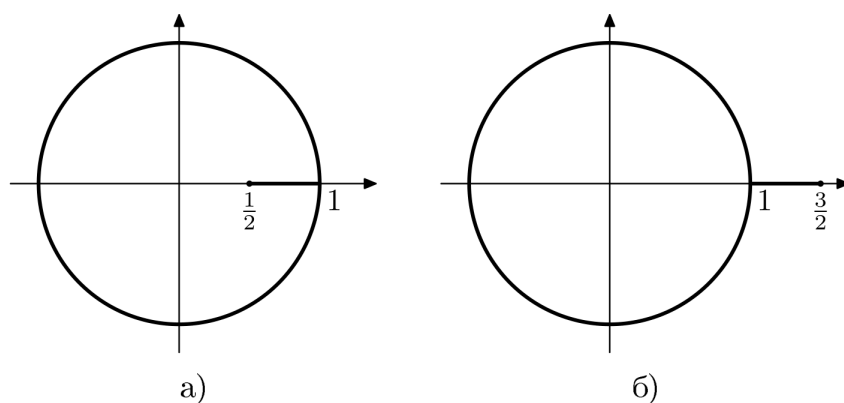


Рис. 1. иллюстрация к задаче 139

14. ПРИНЦИП СИММЕТРИИ И ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ ГРАНИЦ

139. Пусть функция f непрерывна в замкнутом круге $\{|z| \leq 1\}$ и голоморфна в открытом круге $\{|z| < 1\}$. Может ли образ единичной окружности $\{|z| = 1\}$ при отображении f выглядеть так, как на рис. 1а? А может ли так, как на рис. 1б?

140. Постройте (задайте формулой) конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность правильного треугольника (какого-нибудь: форма и размер треугольника не важны).

141. Существует ли конформное отображение между внутренностью квадрата и внутренностью прямоугольника с соотношением сторон 2:1, которое, при соответствии границ, переводит вершины в вершины? *Указание:* воспользуйтесь принципом симметрии.

142. Существует ли конформное отображение между внутренностью правильного треугольника и внутренностью равнобедренного прямоугольного треугольника, которое, при соответствии границ, переводит вершины в вершины?

143. Существует ли конформный изоморфизм между открытым множеством

$$U := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \left| z - \frac{2}{5} \right| > \frac{2}{5} \right\}$$

и каким-нибудь кольцом вида $\{r < |z| < R\}$, где $0 < r < R$?

144. * *Кольцом* называется область $A \subset \mathbb{C}$, гомеоморфная цилиндру $\{|z| = 1\} \times \mathbb{R}$. Докажите, что всякое кольцо A конформно изоморфно единственному цилиндру вида $S \times (0; \mu)$, где S — окружность длины 1 (на этом цилиндре естественным образом можно мерить расстояния и углы, а значит, можно говорить о конформных отображениях в цилиндр). Число μ называется *модулем* кольца A . Вычислите модуль кольца $\{r < |z| < R\}$.

15. ТЭТА-ФУНКЦИИ

Задачи из этого раздела не войдут в итоговый контроль.

Пусть задан параметр $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \tau > 0$; определим *эллиптическую кривую* $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ и *тэта-функцию* с характеристиками a, b рядом

$$\theta_{a,b}(u) = \theta_{a,b}(u, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{(k+a)^2} e^{2\pi i(k+a)(u+b)}, \quad q = e^{i\pi\tau},$$

а также введем *тэта-функции Якоби*

$$\theta_1(u) = -\theta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(u), \quad \theta_2(u) = \theta_{\frac{1}{2}, 0}(u), \quad \theta_3(u) = \theta_{0,0}(u), \quad \theta_4(u) = \theta_{0, \frac{1}{2}}(u).$$

145. Докажите, что ряд абсолютно сходится на $\mathbb{C}$, и тэта-функции являются целыми функциями, причем θ_1 — нечетная, а $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ — четные функции.

146. Докажите, что $\theta_2(u) = \theta_1(u + \frac{1}{2})$, $\theta_3(u) = e^{\pi i(u+\tau/4)}\theta_1(u + \frac{\tau+1}{2})$, $\theta_4(u) = -ie^{\pi i(u+\tau/4)}\theta_1(u + \frac{\tau}{2})$.

147. Докажите следующие свойства тэта-функции при сдвигах на векторы решетки 1, τ :

$$\begin{cases} \theta_1(u+1) = -\theta_1(u) \\ \theta_1(u+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi iu}\theta_1(u). \end{cases}$$

148. Найдите нули функций $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$, $\theta_3(u)$, $\theta_4(u)$ и покажите, что они простые.

149. Докажите, что тэта-функции удовлетворяют «уравнению теплопроводности» $4\pi i \partial_\tau \theta = \partial_u^2 \theta$.

150. Покажите, что если для набора $\alpha_i \in \mathbb{C}$ выполняется $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, то при любых $a_i \in E_\tau$

$$f(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial_u \theta_1(u - a_i)}{\theta_1(u - a_i)}$$

является эллиптической (т.е. двоякопериодической) функцией на $\mathbb{C}$ с периодами $1, \tau$.

151. Покажите, что $P(u) = \partial_u^2 \log \theta_1(u)$ является эллиптической функцией на $\mathbb{C}$ с периодами $1, \tau$ и найдите ее полюса.

152. Докажите тождество

$$\begin{aligned} \theta_1(a+b)\theta_1(a-b)\theta_1(u+c)\theta_1(u-c) + \theta_1(b+c)\theta_1(b-c)\theta_1(u+a)\theta_1(u-a) \\ + \theta_1(c+a)\theta_1(c-a)\theta_1(u+b)\theta_1(u-b) = 0. \end{aligned}$$

153. Докажите тождество

$$P(v) - P(u) = (\theta_1'(0))^2 \frac{\theta_1(u-v)\theta_1(v+u)}{\theta_1^2(u)\theta_1^2(v)}.$$

154. Докажите следующие представления тэта-функций в виде бесконечных произведений:

$$\theta_1(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}e^{2\pi i u})(1 - q^{2n}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_2(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n}e^{2\pi i u})(1 + q^{2n}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_3(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1 + q^{2n-1}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_4(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1 - q^{2n-1}e^{-2\pi i u}).$$

155. Докажите тождество $\theta_1'(0) = \pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$.

156. Докажите формулы модулярного преобразования $\tau \rightarrow -1/\tau$:

$$\theta_1(u/\tau, -1/\tau) = -i\sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_1(u, \tau),$$

$$\theta_2(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_4(u, \tau),$$

$$\theta_3(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_3(u, \tau),$$

$$\theta_4(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_2(u, \tau).$$

16. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Задачи из этого раздела не войдут в итоговый контроль.

$\wp$ -функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$ ($\text{Im } \omega_2/\omega_1 > 0$):

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{s \neq 0} \left(\frac{1}{(z-s)^2} - \frac{1}{s^2} \right), \quad s = 2\omega_1 n_1 + 2\omega_2 n_2, \quad n_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

Разложение в окрестности $z = 0$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + O(z^6),$$

$$g_2 = 60 \sum_{s \neq 0} s^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{s \neq 0} s^{-6}.$$

ζ - и σ -функции Вейерштрасса: $\zeta'(z) = -\wp(z)$, $\sigma'(z)/\sigma(z) = \zeta(z)$,

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(x) - \frac{1}{x^2} \right) dx, \quad \log(\sigma(z)/z) = \int_0^z \left(\zeta(x) - \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{s \neq 0} \left(\frac{1}{z-s} + \frac{1}{s} + \frac{z}{s^2} \right), \quad \sigma(z) = z \prod_{s \neq 0} \left(1 - \frac{z}{s} \right) e^{\frac{z}{s} + \frac{z^2}{2s^2}}.$$

$\zeta(z + 2\omega_\alpha) = \zeta(z) + 2\eta_\alpha$, $\sigma(z + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(z + \omega_\alpha)} \sigma(z)$, $\eta_\alpha = \zeta(\omega_\alpha)$.

Выражение σ -функции через тэта-функцию:

$$\sigma(z) = 2\omega_1 e^{\eta_1 z^2 / (2\omega_1)} \frac{\theta_1(z / (2\omega_1))}{\theta_1'(0)}.$$

Функции sn , cn и dn :

$$\text{sn } u = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \frac{\theta_1\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\right)}{\theta_4\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\right)}, \quad \text{cn } u = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)} \frac{\theta_2\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\right)}{\theta_4\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\right)}, \quad \text{dn } u = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \frac{\theta_3\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\right)}{\theta_4\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2(0)}\right)}.$$

157. Докажите, что функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

158. Докажите тождество $\wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z)$.

159. Докажите соотношение $2\eta_1\omega_2 - 2\eta_2\omega_1 = \pi i$.

160. Докажите, что при $x + y + z = 0$ справедливо тождество

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z) & \wp'(z) \end{vmatrix} = 0.$$

161. Выразите $\begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z) & \wp'(z) \end{vmatrix}$ при произвольных $x, y, z \in \mathbb{C}$ через σ -функции.

162. Докажите, что при $x + y + z = 0$ справедливо тождество

$$\left(\zeta(x) + \zeta(y) + \zeta(z) \right)^2 = \wp(x) + \wp(y) + \wp(z).$$

163. Докажите тождество

$$\zeta(x - a_1) - \zeta(x - a_2) + \zeta(a_1 - a_2) = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(x - a_1) + \wp'(x - a_2)}{\wp(x - a_1) - \wp(x - a_2)}.$$

164. Докажите тождества

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

где $k^2 = \theta_2^4(0)/\theta_3^4(0)$.

17. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ И ИТоговОМУ ЭкЗАМЕНУ

165. Как выглядит (в базисе $1, i$) матрица линейного над $\mathbb{R}$ отображения $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, такого, что $z \mapsto f(\bar{z})$ голоморфно?

166. В чем состоит геометрический смысл числа $\arg f'(a)$ для функции f , определенной и голоморфной в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, при условии, что $f'(a) \neq 0$?

167. Пусть функция f определена и непрерывна в замыкании области D с кусочно гладкой границей, и пусть f голоморфна в области D . Рассмотрим функцию $g : \mathbb{C} \setminus \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, заданную уравнением

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Что можно сказать про значения функции g внутри и вне области D ? В каких случаях эту функцию можно продолжить по непрерывности на всю плоскость?

168. Выразите $\operatorname{Res}_0 f(5z) dz$ через $\operatorname{Res}_0 f(z) dz$. Здесь f — функция, определенная и голоморфная в проколоте окрестности точки $z = 0$.

169. Как может выглядеть область сходимости ряда Лорана (т.е. максимальное *открытое* множество, во всех точках которого ряд Лорана сходится)? Укажите все возможные области и строго обоснуйте ответ.

170. Функция f определена и непрерывна в замкнутом кольце $\bar{A} = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$, а также голоморфна в открытом кольце $A = \{z : 1 < |z| < 2\}$. Известны значения $f(z)$ при $|z| = 1$ и $|z| = 2$. Как найти коэффициенты разложения функции f в ряд Лорана в кольце A (выведите соответствующие интегральные формулы)?

171. Опишите множество всех комплексных чисел, которые можно представить как $\text{Res}_0 \frac{df}{f}$ для

а) некоторой аналитической функции f , имеющей в точке $z = 0$ изолированную особенность;

б) некоторой аналитической функции f , имеющей в точке $z = 0$ полюс?

172. Пусть функция $f(z)$ определена и голоморфна в проколотой окрестности точки $z = 0$. Верно ли следующее утверждение (стро-го обоснуйте ответ)? Точка $z = 0$ является существенной особен-ностью функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда она является существенной особенностью функции $f(z)(1 + e^{f(z)})$.

173. Докажите, что следующие ростки голоморфных функций не допускают аналитического продолжения вдоль отрезка $[-1; 1]$ с на-правлением от 1 к -1 :

(а) росток функции $1/z$ в точке 1;

(б) росток функции $\sqrt{z}$ в точке 1, такой, что $\sqrt{1} = 1$.

174. Приведите пример многозначной аналитической функции f со следующими свойствами: f определена и голоморфна всюду на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, причем множество значений функции f в каждой точке $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.

175. Пользуясь свойствами голоморфных функций, обоснуйте сле-дующее утверждение про вещественные гармонические функции. Если вещественнозначная функция u непрерывна на компактном множестве K и гармонична во внутренности множества K , то ее минимальное значение достигается в некоторой граничной точке множества K .

176. Сформулируйте и докажите теорему о среднем для гармони-ческих функций.

177. Докажите, что существует не более одной, с точностью до умножения на положительную константу, конформной метрики на диске $\{|z| < 1\}$, инвариантной относительно всех конформных ав-томорфизмов диска.

178. Найдите гиперболическую метрику на проколоте диске $\{0 < |z| < 1\}$. Покажите, что площадь проколотой окрестности нуля относительно этой метрики конечна.

179. Последовательность голоморфных функций $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ на области $U \subset \mathbb{C}$ сходится равномерно на компактах к функции $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Докажите, что производные f'_n сходятся (равномерно на компактах) к производной f' .

180. Последовательность многочленов степени 2026 сходится равномерно на компактах на всем $\mathbb{C}$. Может ли предел этой последовательности быть многочленом степени 2025? А может ли он быть многочленом степени 2027? А может ли он вообще не быть многочленом? Строго обоснуйте ответы.

181. Существует ли конформный изоморфизм между $\mathbb{H} \setminus \{i, 2i\}$ и $\mathbb{H} \setminus \{i, 3i\}$, где $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ — верхняя полуплоскость? Строго обоснуйте ответы.

182. Пользуясь теоремой Римана об отображении и принципом соответствия границ, постройте голоморфное накрытие $p : \{|z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Выведите, что на $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ имеется гиперболическая метрика.