

Задачи к семинарам. Математический анализ, 2 курс

Осень 2025

0.1 Нормированные и евклидовы пространства

1. (а) Докажите, что функции

$$|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad |x|_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

являются нормами в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ полно в каждой из этих норм.

- (b) (*) Докажите аналогичные утверждения для пространств действительных последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

и норм

$$|x|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i|, \quad |x|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

Т.е., рассмотрите пространство последовательностей $l^\infty = \{x : |x|_\infty < \infty\}$ и пространство $l^1 = \{x : |x|_1 < \infty\}$ и докажите, что l^∞, l^1 являются полными нормированными пространствами.

2. Докажите, что пространство $C([0, 1])$ не является полным для нормы

$$f \rightarrow \int_0^1 |f(x)| dx.$$

3. Пусть X — нормированное пространство с нормой $x \rightarrow |x|$. Докажите, что множество $B = \{x : |x| \leq 1\}$ 1. выпукло, 2. уравновешено (т.е., содержит $-x$, если $x \in B$, 3. поглощающее (т.е., $\cup_{\lambda > 0} \lambda B = X$), 4. не содержит ни одной прямой.
4. Докажите, что если множество B удовлетворяет условиям 1-4 предыдущей задачи, то функция $p(x) = \inf_{\lambda > 0, x \in \lambda B} \lambda$ является нормой.

5. Выведите из предыдущей задачи, что функция

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

является нормой в $\mathbb{R}^n$ для $p \geq 1$. Что получается в пределе $p \rightarrow \infty$?

6. Докажите неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq |x|_p |y|_q,$$

где $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

7. (*) Пространство $\mathbb{R}^\infty$ состоит из всех действительных последовательностей:

$$\mathbb{R}^\infty \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

В $\mathbb{R}^\infty$ задана покоординатная сходимость, т.е. $\lim_{m \rightarrow \infty} x(m) = x$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_n(m) = x_n$$

для всех n . Докажите, что сходимость в $\mathbb{R}^\infty$ не задается никакой нормой.

8. Доказать, что в конечномерном линейном векторном пространстве L любые две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны, т.е. существуют константы $a, b > 0$ со свойством

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

9. Докажите, что функция $x \rightarrow \sqrt{(x, x)}$ является нормой в евклидовом пространстве.

10. (*) Доказать, что нормированное пространство с нормой $\|x\|$ является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов x и y выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

11. Докажите, что следующие пространства не являются евклидовыми:
1. $\mathbb{R}^n$ с нормой $|x|_p$, 2. $C([0, 1])$ с равномерной нормой.

12. Пусть L — нормированное пространство, а $L_0 \subset L$ — линейное многообразие L , т.е. множество со свойством: если $x, y \in L_0$, то $ax + by \in L_0$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что замыкание L_0 в L тоже является линейным многообразием.

13. Докажите, что пространство l^∞ несепарабельно.

0.2 Пространство L^2 . Ортогонализация. Ортогональные системы.

1. Докажите, что

- (а) Сходимость в $L^2([0, 1])$ влечет сходимость в $L^1([0, 1])$
- (б) Сходимость в $L^1([0, 1])$ влечет сходимость по мере Лебега
- (с) Сходимость в $L^1([0, 1])$ и $L^2([0, 1])$ не влечет сходимости почти всюду.

2. Докажите, что система функций

$$1, \cos\left(\frac{2\pi}{b-a}nt\right), \sin\left(\frac{2\pi}{b-a}nt\right), \dots$$

ортогональна в $L^2([a, b])$.

3. Многочлены Чебышева на $[-1, 1]$ задаются формулой

$$T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos(x)).$$

Докажите, что

- (а) T_n действительно многочлен степени n .
- (б) T_n — ортогональная система в $L^2\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
- (с) T_n удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

4. Найдите явный вид изоморфизма Рисса для следующих пар гильбертовых пространств

- (а) $L^2([0, 2\pi]), L^2([a, b])$
- (б) $L^2([0, 2\pi]), L^2([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$.

5. Докажите, что если $L \subset X$ — линейное подмножество гильбертова пространства, а $\perp$ — операция ортогонального дополнения, то $L^\perp$ — замкнутое пространство, а $(L^\perp)^\perp$ совпадает с замыканием L .

6. Найти ортогональное дополнение в пространстве $L^2([-1, 1])$ к подпространствам

- (а) Функций, равных нулю при $t \leq 0$
- (б) Чётных функций
- (с) Функций со свойством $\int_0^1 x(t)dt = 0$.

7. Найти ортогональное дополнение в пространстве $C([-1, 1])$ с нормой $\sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$ к подпространству $\{f : f(0) = 0\}$.

8. В пространстве $L^2([0, 1])$ найдите расстояние от функции t^{n-1} до подпространства $\{x : \int_0^1 x(t)dt = 0\}$
9. Примените процесс ортогонализации к многочленам $1, x, x^2, x^2, \dots$ и опишите общий вид полученной ортогональной системы
 - (а) В пространстве $L^2([-1, 1])$
 - (б) В пространстве $L^2(\gamma)$, где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ — мера на $\mathbb{R}$
 - (с) В пространстве $L^2([-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$
10. Докажите, что система Радемахера $\text{sign} \sin(2^n \pi t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ортонормирована в $L^2[0, 1]$.

0.3 Тригонометрические ряды Фурье

Напомним, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

является полной ортонормированной системой в пространстве $L^2([-\pi, \pi])$ ($L^2([0, 2\pi])$). Ряд Фурье функции $f \in L^2([-\pi, \pi])$ вычисляется по формуле

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

1. Разложите функцию в ряд Фурье на указанном интервале. В каких точках ряд Фурье сходится к функции?
 - (а) $\cos^4 x$, $[-\pi, \pi]$
 - (б) $f(x) = A$, если $x \in [0, l]$, $f(x) = 0$, если $x \in (l, 2l]$, где A — постоянная, интервал разложения $[0, 2l]$.
 - (с) x , $[-\pi, \pi]$
 - (д) $|x|$, $[-\pi, \pi]$

- (e) $x \sin x$, $[-\pi, \pi]$
- (f) $\ln |2 \sin(x/2)|$, $[-\pi, \pi]$
- (g) x^2 по косинусам на $[-\pi, \pi]$
- (h) x^2 по синусам на $[0, \pi]$

2. Пользуясь полученными выше разложениями, найдите суммы

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
- (e) Разложите в ряд Фурье функцию f , определенную соотношениями $f(x) = 1$ на $[-\alpha, \alpha]$, $f(x) = 0$, $|x| > \alpha$, $0 < \alpha < \pi$, на $[-\pi, \pi]$. Найдите суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{n^2}.$$

- (f) Разложите функцию x^4 в ряд Фурье и докажите тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{120}$$

0.4 Свойства тригонометрических рядов Фурье. Вопросы сходимости.

Всюду далее, если не оговорено обратное, рассматривается стандартный тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функции f .

1. Пусть a_n, b_n — коэффициенты Фурье интегрируемой функции f 1) Докажите (лемма Римана), что $a_n, b_n \rightarrow 0$. 2) Верно ли, что $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$? 3) При каком условии $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty$?
2. (a) Докажите, что если функция f непрерывно дифференцируема, и $f(\pi) = f(-\pi)$ то $a_n = o(\frac{1}{n})$, $b_n = o(\frac{1}{n})$.
(b) Докажите, что если функция f удовлетворяет условию Гёльдера $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то $a_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$, $b_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$.
3. Зная коэффициенты Фурье функции f , вычислите коэффициенты Фурье следующих функций: 1) $f(x + h)$, 2) $\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.
4. Рассмотрим ряд Фурье функции f в комплексной форме

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Докажите, что если $f \geq 0$, то c_n — положительно определённая последовательность, т.е. для любого набора комплексных чисел z_n , $1 \leq n \leq N$

$$\sum_{n,m} c_{n-m} z_n \bar{z}_m \geq 0.$$

5. (а) Пусть f — дифференцируемая функция, причем $f, f' \in L^2([-\pi, \pi])$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. Используя разложения в ряд Фурье докажите, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx.$$

- (б) Пользуясь полнотой многочленов Эрмита в $L^2(e^{-\frac{x^2}{2}} dx)$ докажите, что если f — дифференцируемая функция, причем $f, f' \in L^2(e^{-\frac{x^2}{2}} dx)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

6. (*) Пусть $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Докажите, что суммы Фейера $\sigma_n(f)$ сходятся к f в $L^1([-\pi, \pi])$. Выведите отсюда, что у двух разных функций из $L^1([-\pi, \pi])$ не может быть одинаковых рядов Фурье.
7. (*) Докажите изопериметрическое неравенство на плоскости, используя ряды Фурье (см. А.В. Зорич, Математический анализ, т.2., XVIII (2)).
8. Докажите, что если $f \in L^1([0, 2\pi])$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ сходится. Указание: сведите утверждение к случаю $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Воспользуйтесь теоремой о разложении функции $F(x) = \int_0^x f(y) dy$ в поточечно сходящийся ряд Фурье

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

и выразите A_n, B_n через a_n, b_n .

9. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ на $[0, 2\pi]$, где b_n — монотонная последовательность, стремящаяся к нулю.
- (а) Докажите, что ряд сходится равномерно к некоторой функции f на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.
- (б) Приведите пример, когда $f \notin L^2([0, 2\pi])$.
- (с) Приведите пример, когда $f \notin L^1([0, 2\pi])$ (воспользуйтесь задачей 8).

0.5 Ряды Фурье и уравнения в частных производных

1. Рассмотрим теплоизолированный стержень длины l , в начальный момент времени половина стержня имеет температуру u_1 , а другая половина температуру u_2 . Изменение температуры $u(t, x)$ стержня со временем описывается уравнением

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

где a — постоянная. Условие теплоизоляции на концах описывается уравнениями $u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0$.

Решить уравнение методом Фурье. Найти предел решения при $t \rightarrow \infty$. Оценить время, когда перепад температуры в нуле сократится вдвое.

2. Концы стержня $[0, 1]$ поддерживаются при постоянных температурах $u(t, 0) = a$, $u(t, 1) = b$, а начальная температура равна $u(0, x) = \varphi(x)$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$. (Сведите к задаче с нулевыми граничными условиями).
3. Решите методом Фурье следующую задачу для уравнения колебаний струны на $[0, \pi]$

$$u_{tt} = u_{xx}, u(t, 0) = 0, u(t, \pi) = t, u(0, x) = u_t(0, x) = 0.$$

(Сведите к задаче с нулевыми граничными условиями).

4. Найдите методом Фурье решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\Delta u = 0, u(0, y) = u(a, y) = 0, u(x, 0) = \varphi(x), u(x, b) = \psi(x)$$

5. Найдите решение задачи Штурма–Лиувилля, найдите все собственные значения и собственные функции и докажите полноту системы собственных функций в $L^2([0, l])$:

$$(a) -y'' = \lambda y, y'(0) = y'(l) = 0$$

$$(b) -y'' = \lambda y, y(0) = y(l) = 0$$

6. Доказать, что задача Штурма–Лиувилля на отрезке $[0, 1]$

$$-y'' = \lambda y, y'(0) - y(0) = 0, y(1) = 0$$

$$(a) \text{ имеет собственные значения } \mu_n^2, \text{ где } \mu \text{ — корни уравнения } \tan(\mu) = -\nu$$

$$(b) \text{ найти собственные функции}$$

$$(c) \text{ найти асимптотику собственных значений при } n \rightarrow \infty$$

0.6 Преобразование Фурье

1. Найти интеграл (в смысле главного значения)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Указание: используйте тождество $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$ и теорему Фубини. Докажите, что функция $\frac{\sin x}{x}$ не интегрируема по Лебегу.

2. Найдите преобразование Фурье функции $I_{[-a,a]}$.
3. Найдите преобразование Фурье функции $e^{-|x|}$.
4. Используя предыдущую задачу, найдите преобразование Фурье функции $\frac{1}{a^2+x^2}$.
5. Найдите преобразование Фурье функции $e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$.
6. Найдите преобразование Фурье функции $(1-|x|)I_{[-1,1]}$.
7. Используя предыдущую задачу, найти интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.
8. Выразите преобразование Фурье функции $f(a+bx)$ в терминах преобразования Фурье функции f .
9. Докажите соотношения
 - (a) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(x)g(x)dx$, если $f, g \in L^1(\mathbb{R})$
 - (b) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(x)\bar{\hat{g}}(x)dx$, если $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{S}$.
10. (*) Докажите, что если $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, то f имеет непрерывную модификацию
11. Придумайте такую функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \notin L^2(\mathbb{R})$.
12. Придумайте такую функцию $f \in L^2(\mathbb{R})$, что $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.
13. Докажите формулу Пуассона : если $f \in \mathcal{S}$, то

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Примените формулу к функции e^{ax^2} .

0.7 Свертка. Уравнения в частных производных

1. Найти свертку функций f, g

(a) $f = g = I_{[0,1]}$

(b) $f = e^{\frac{-(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, g = e^{\frac{-(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

(c) $f = \frac{a}{x^2+a^2}, g = \frac{b}{x^2+b^2}$

2. Найдите $f * f * \dots * f$ (n раз), $f(x) = I_{[0,+\infty)}e^{-x}$.

3. Решить уравнение в $\mathcal{S}$: $y'' - y = e^{-x^2}$

4. Решить уравнение теплопроводности

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx}$$

с начальными условиями

(a) $u(0, x) = e^{-x}$

(b) $u(0, x) = e^{-x^2}$

5. (*)

(a) Используя преобразование Фурье, выведите формулу Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \varphi(t) dt \quad (1)$$

для решения следующего уравнения:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (2)$$

$x \in \mathbb{R}, y > 0, u(x, 0) = \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Предполагается, что $u(x, y)$ принадлежит $\mathcal{S}$ для всех $y > 0$ и $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$ для всех x .

(b) Докажите, что для функции, заданной формулой (1) верны свойства

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi(x)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$$

(c) Докажите уравнение (2) при $y > 0$ для функции, заданной формулой (1).