

Вариант 0

1. Пусть $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ — нормы в $\mathbb{R}^n$. Найдите 1) какие-нибудь константы c_n, C_n , 2) наилучшие константы c_n, C_n в неравенстве

$$c_n |x|_1 \leq |x|_2 \leq C_n |x|_1.$$

2. Найдите ортогональные многочлены степени 0, 1, 2, 3 в пространстве функций на $[0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(f, g) \rightarrow \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

3. Какой особенностью обладает ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функции f со свойством $f(x + \pi) = f(x)$?
4. Разложите в ряд Фурье функцию на $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \max\{0, \sin x\}.$$

В каких точках ряд сходится к функции?

Вариант 1

1. Пусть $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — нормы в $\mathbb{R}^n$. Найдите
1) какие-нибудь константы c_n, C_n , 2) наилучшие константы c_n, C_n в неравенстве

$$c_n |x|_1 \leq |x|_\infty \leq C_n |x|_1.$$

2. В пространстве $L^2(-\pi, \pi)$ рассмотрим линейное подпространство L многочленов не более чем второй степени. Представьте многочлен x^3 в виде $P + Q$, где $P \in L$, а Q ортогонален L . Найдите расстояние от x^3 до L .
3. Пусть D — прямоугольник на координатной плоскости с центром в нуле, меньшая сторона параллельна OX и равна 1, большая сторона параллельна OY и равна 2. Найдите норму в $\mathbb{R}^2$, относительно которой D является единичной сферой.
4. Разложите в ряд Фурье функцию на $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = x \sin 2x.$$

В каких точках ряд сходится к функции?