

Программа экзамена. Математический анализ, 2 курс

Осень 2025

Экзамен проводится в устной форме. Все студенты получают по билету, в котором будет два вопроса из приведенной программы и одна задача из списка, выложенного на странице курса. На подготовку дается 30 минут. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. Правильный ответ на каждый вопрос и правильно решенная задача оцениваются в 3 балла. Если студент отвечает на все вопросы и решает задачу, то он получает оценку 10. В противном случае преподаватель может задать дополнительный вопрос, ответ на который может как повысить, так и понизить набранную за билет сумму баллов, которая формирует оценку.

1. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности (без обоснования сходимости).
2. Доказать сходимости ряда, представляющего решение 1-ой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности, которое получается по методу Фурье. Доказать теорему о существовании решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о единственности решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности
3. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения упругих колебаний струны. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения упругих колебаний струны.
4. Вывести формулу Фурье для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ формально из ряда Фурье этой функции (без обоснования сходимости). Доказать теорему о сходимости интеграла Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ при выполнении условия Дини. Записать интеграл Фурье в комплексной форме и дать определение преобразования Фурье.
5. Доказать равномерную сходимость последовательности $\hat{f}_n$ преобразований Фурье, если известно, что f_n сходится в норме $L^1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ является ограниченной непрерывной функцией, стремящейся к нулю на бесконечности. Вывести формулу для преобразования Фурье производной f' при условии, что $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k -производной функции f . Связь порядка гладкости функции со степенью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье. Вывести формулу производной преобразования Фурье $\hat{f}$ при условии $f, xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k -производной функции $\hat{f}$. Связь порядка гладкости функции $\hat{f}$ со степенью убывания на бесконечности функции f .
6. Дать определение пространства Шварца S . Привести примеры функций из пространства Шварца. Доказать, что операторы дифференцирования и умножения на полином переводят пространство Шварца в себя. Написать формулу для преобразования Фурье действия дифференциального оператора на функцию из пространства Шварца. Написать формулу для действия дифференциального оператора на преобразование Фурье функции из пространства Шварца. Доказать, что

преобразование Фурье переводит пространство Шварца в себя. Формула обратного преобразования Фурье в пространстве Шварца. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца.

7. Определение преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. Доказательство равносильности различных определений преобразований Фурье для функций, принадлежащих как $L^1(\mathbb{R})$, так и $L^2(\mathbb{R})$.
8. Получить формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ методом разделения переменных (без строго обоснования). Вывести формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ в пространстве Шварца с помощью преобразования Фурье. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ с начальным условием из пространства Шварца. Доказать основные свойства ядра Пуассона : положительность, бесконечную дифференцируемость по всем аргументам при $t > 0$, выполнение уравнения теплопроводности при $t > 0$. Доказать, что формула Пуассона, в которой φ – непрерывная и ограниченная функция, задает бесконечно дифференцируемую функцию $u(x, t)$ при $t > 0$, которая является решением уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$. Доказать, что формула Пуассона, в которой φ – непрерывная и ограниченная функция, задает непрерывную функцию $u(x, t)$ при $t \geq 0$, которая удовлетворяет начальному условию φ .
9. Дать определение свертки функций из пространства $L^1(\mathbb{R})$. Доказать, что свертка принадлежит $L^1(\mathbb{R})$. Вывести формулу преобразования Фурье от свертки двух функций.
10. Вывести формулу для решения уравнения упругих колебаний бесконечной струны в пространстве Шварца S с помощью преобразования Фурье.